

IX. Rappel : Les structures des problèmes arithmétiques

Au cours des séances de calcul mental, il est intéressant de faire résoudre aux élèves des problèmes à l'oral avec des petits nombres. Contrairement à certaines idées reçues, ce n'est pas l'opération mathématique en tant que telle qui constitue la principale difficulté de résolution d'un problème arithmétique : un problème utilisant une addition n'est pas nécessairement plus simple qu'un problème utilisant une soustraction, comme un problème de multiplication n'est pas nécessairement plus facile qu'un problème de division.

Différents paramètres déterminent le degré de complexité d'un problème. Outre, la nature et la taille des nombres, c'est principalement la structure mathématique qui influe sur sa résolution, c'est-à-dire les relations qui existent entre les données du problème.

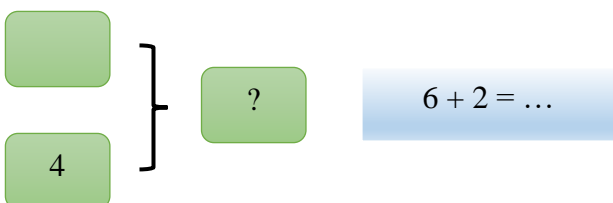
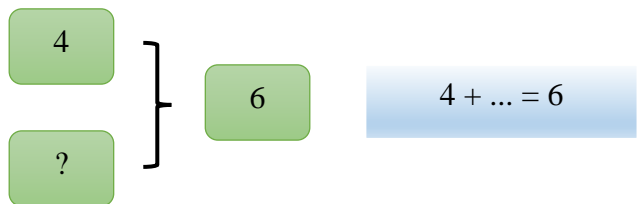
Nous nous sommes appuyés sur la classification des problèmes de G. Vergnaud pour concevoir une progression dans la résolution de ces problèmes, tout au long de l'année. Nous appelons problèmes additifs les problèmes arithmétiques simples qui se résolvent par une addition ou une soustraction puisqu'ils relèvent d'un même champ conceptuel, celui des structures additives. De même, nous appelons problèmes multiplicatifs ceux qui se résolvent par une multiplication ou une division constituant ainsi le champ des structures multiplicatives.

Les structures additives travaillées au CE2

Les problèmes choisis font appel à plusieurs des structures additives. Au sein d'une même structure, suivant la place des données et du nombre sur lequel porte la question, on obtient différents problèmes dont la difficulté varie : pour les résoudre, on utilise une addition ou une soustraction.

Les problèmes de composition d'états (partie - partie-tout)

On considère les situations qui portent sur 3 grandeurs : deux états se composent pour donner un troisième état. Il s'agit d'une composition statique qui relie des éléments simultanés : les parties et le tout. Suivant la place du nombre sur lequel porte la question, on opérera avec une addition ou avec une soustraction.

<i>Les deux parties connues, recherche du tout.</i>	<i>Une partie et le tout connus, recherche de l'autre partie.</i>
<p>Exemple 7 : Léo a 6 billes bleues et 4 billes rouges. Combien a-t-il de billes en tout ?</p> 	<p>Exemple 8 : Léo a 6 billes. 4 de ses billes sont bleues et les autres sont rouges. Combien a-t-il de billes rouges ?</p> 

Les problèmes de transformation

Une transformation opère sur un état initial pour donner un état final. C'est une composition dynamique qui relie des éléments en faisant intervenir une composante temporelle. Cette transformation peut être positive (une augmentation) ou négative (une diminution).

<i>Etat initial connu, augmentation (ou diminution) connue, recherche de l'état final.</i>	
<p>Exemple 1 : Max avait 6 crayons. Lola lui en donne 3. Combien en a-t-il maintenant ?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> </div>	<p>Exemple 2 : Max avait 6 crayons. Il en donne 3 à Lola. Combien en a-t-il maintenant ?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> </div>
<i>Etat initial connu, état final connu, recherche de la transformation (augmentation ou diminution).</i>	
<p>Exemple 3 : Max avait 6 crayons le matin. Lola lui en donne et le soir il en a 8. Combien Lola lui en a-t-elle donné ?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> </div>	<p>Exemple 4 : Max avait 6 crayons le matin. Il en donne à Lola et après, il en a 4. Combien en a-t-il donné à Lola ?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> </div>
<i>Transformation connue (augmentation ou diminution), état final connu, recherche de l'état initial.</i>	
<p>Exemple 5 : Max avait des crayons le matin. Lola lui en donne 6 et le soir, il en a 20. Combien avait-il de crayons le matin ?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px; background-color: #e0f0ff; padding: 5px;"> $... + 6 = 20 \text{ ou } 20 - 6 = ...$ </div>	<p>Exemple 6 : Max avait des crayons le matin. Il en donne 6 à Lola et le soir, il en a 20. Combien avait-il de crayons le matin ?</p> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;"> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px; background-color: #e0f0ff; padding: 5px;"> $... - 6 = 20 \text{ ou } 20 + 6 = ...$ </div>

Les problèmes de comparaison additive

C'est une situation où on compare deux états : un référé et un référent. La relation de comparaison est presque toujours donnée par une expression de type « de plus que » ou « de moins que ». C'est une relation statique. Suivant la place du nombre sur lequel porte la question, on opérera avec une addition ou avec une soustraction.

<i>Référent connu, relation connue (plus ou moins), recherche du référé.</i>	
<p>Exemple 9 : Léo a 5 crayons. Lola en a 2 de plus que Léo. Combien de crayons a Lola ?</p> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Léo</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">5</div> </div> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #fff9c4;">+ 2</div> <div style="background-color: #bbdefb; padding: 5px; border-radius: 10px;">5 + 2 = ...</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px; margin-top: 10px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Lola</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">?</div> </div> </div>	<p>Exemple 10 : Léo a 5 crayons. Lola en a 2 de moins que Léo. Combien de crayons a Lola ?</p> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Léo</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">5</div> </div> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #fff9c4;">- 2</div> <div style="background-color: #bbdefb; padding: 5px; border-radius: 10px;">5 - 2 = ...</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px; margin-top: 10px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Lola</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">?</div> </div> </div>
<i>Référent et référé connus, recherche de la relation.</i>	
<p>Exemple 11 : Léo a 5 crayons. Lola a 8 crayons. Qui en a le plus ? Combien en plus ?</p> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Léo</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">5</div> </div> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #fff9c4;">+ ?</div> <div style="background-color: #bbdefb; padding: 5px; border-radius: 10px;">5 + ... = 8</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px; margin-top: 10px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Lola</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">8</div> </div> </div>	<p>Exemple 12 : Léo a 5 crayons. Lola a 2 crayons. Qui en a le moins ? Combien en moins ?</p> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Léo</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">5</div> </div> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #fff9c4;">- ?</div> <div style="background-color: #bbdefb; padding: 5px; border-radius: 10px;">5 - ... = 2</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px; margin-top: 10px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Lola</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">2</div> </div> </div>
<i>Référé et relation connus, recherche du référent.</i>	
<p>Exemple 13 : Léo a des crayons. Lola a 8 crayons. Elle en a 3 de plus que Léo. Combien de crayons a Léo ?</p> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Léo</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">?</div> </div> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #fff9c4;">+ 3</div> <div style="background-color: #bbdefb; padding: 5px; border-radius: 10px;">... + 3 = 8</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px; margin-top: 10px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Lola</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">8</div> </div> </div>	<p>Exemple 14 : Léo des crayons. Lola a 8 crayons. Elle en a 3 de moins que Léo. Combien de crayons a Léo ?</p> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Léo</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">?</div> </div> <div style="font-size: 2em;">↓</div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #fff9c4;">- 3</div> <div style="background-color: #bbdefb; padding: 5px; border-radius: 10px;">... - 3 = 8</div> </div> </div> <div style="display: flex; align-items: center; gap: 20px; margin-top: 10px;"> <div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 10px;"> <div style="display: flex; align-items: center;">Lola</div> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; width: 40px; height: 30px; display: flex; align-items: center; justify-content: center; background-color: #c8e6c9;">8</div> </div> </div>

Les problèmes de composition d'augmentations

Deux transformations se composent pour donner une autre transformation. Il s'agit ici de commencer avec deux augmentations qui sont connues et de rechercher l'augmentation finale.

Les deux augmentations connues, recherche de l'augmentation finale

Exemple 11 : Lola a d'abord gagné 6 billes puis encore 2.
Combien a-t-elle gagné de billes au final ?

$6 + 2 = \dots$

Les structures multiplicatives travaillées au CE2

Les problèmes choisis font appel à plusieurs des structures multiplicatives et au sein d'une même structure, suivant la place des données et du nombre sur lequel porte la question, on obtient différents problèmes dont la difficulté varie : pour les résoudre, on utilise une multiplication ou une division.

Les problèmes de comparaison multiplicative

Les relations entre les données définissent une comparaison numérique entre deux grandeurs de même nature : donc cette relation est donnée sous la forme d'un nombre sans unité, C'est une comparaison qui relie deux états : un référé et un référent. La relation de comparaison est statique et presque toujours donnée par une expression de type « fois plus que » ou « fois moins que ». La structure mathématique est simple mais la complexité de ces expressions rend l'interprétation des énoncés difficile : par exemple, l'expression « fois plus » peut être confondue avec « de plus » et associée à une structure additive.

Rapport connu, recherche d'une des grandeurs.	
Recherche du référé	
<p>Exemple 1 : Léo a 15 billes. Max en a 3 fois plus que Léo. Combien Max a-t-il de billes ?</p> <p>Léo 15 ↓ x 3 15 x 3 = ...</p> <p>Max ?</p>	<p>Exemple 2 : Léo a 15 billes. Max en a 3 fois moins que Léo. Combien Max a-t-il de billes ?</p> <p>Léo 15 ↓ : 3 15 : 3 = ...</p> <p>Max ?</p>
Recherche du référent	
<p>Exemple 3 : Max a 3 fois plus de billes que Léo. Max a 15 billes. Combien Léo a-t-il de billes ?</p> <p>Léo ? ↓ x 3 15 = ... x 3</p> <p>Max 15</p>	<p>Exemple 4 : Max a 3 fois moins de billes que Léo. Max a 15 billes. Combien Léo a-t-il de billes ?</p> <p>Léo ? ↓ : 3 ... : 3 = 15</p> <p>Max 15</p>
Grandeurs connues, recherche du rapport	
<p>Exemple 5 : Lola a 6 crayons. Nora en a 18. Qui en a le plus ? Combien de fois plus ?</p> <p>Lola 6 ↓ x ? 6 x ... = 18</p> <p>Nora 18</p>	<p>Exemple 6 : Lola a 16 crayons. Nora en a 8. Qui en a le moins ? Combien de fois moins ?</p> <p>Lola 16 ↓ : ? 16 : ... = 8</p> <p>Nora 8</p>

Les situations de proportionnalité simple où l'un des nombres est égal à 1

Cette structure met en jeu quatre quantités appartenant à deux espaces de mesures différents : il s'agit d'une relation quaternaire. Dans les problèmes de cette catégorie, deux domaines de grandeurs sont mis en jeu et un rapport est défini entre deux grandeurs de ces domaines. La structure mathématique est dite de "quatrième proportionnelle". En fonction de la place occupée par l'inconnue, nous obtiendrons différents types de problèmes se résolvant aussi bien par une multiplication que par une division de type partition ou de type quotition. Pour trouver l'inconnue, il est possible de chercher les rapports de façon verticale (entre grandeurs d'un même domaine) ou de façon horizontale (entre les deux domaines).

Itération ou groupements multiplicatifs avec recherche du tout.

Exemple 7 :

Les élèves d'une classe sont regroupés en 6 équipes. Il y a 4 élèves par équipe. **Combien y a-t-il d'élèves en tout ?**

Equipes	Elèves
1	4
6	?

Exemple 8 :

Lola fabrique des bouquets de 4 roses. **Combien faut-il de roses pour fabriquer 6 bouquets ?**

Bouquets	Roses
1	4
6	?

L'opération à faire est une multiplication : $6 \times 4 = \dots$

Groupements ou partages avec recherches du nombre d'éléments dans une part (partition).

Exemple 9 :

Dans une classe, il y a 24 élèves. On fait 6 équipes. **Combien y a-t-il d'élèves par équipe ?**

Equipes	Elèves
6	24
1	?

Exemple 10 :

Il y a 24 billes. Elles sont partagées équitablement entre 6 enfants. **Combien chacun a-t-il de billes ?**

Enfants	Billes
6	24
1	?

L'opération à faire est une division partition pour chercher la valeur unitaire (celle d'une part) :

$$6 \times \dots = 24 \text{ ou } 24 : 6 = \dots$$

Groupements ou partages avec recherche du nombre de parts (quotition).

Exemple 11 :

Lola a 24 roses. Avec ces roses, elle fait des bouquets de 4 roses. **Combien peut-elle faire de bouquets ?**

Bouquets	Fleurs
?	24
1	4

Exemple 12 :

Il y a 24 billes. Elles sont partagées équitablement entre des enfants ; chacun en reçoit 4. **Combien y a-t-il d'enfants ?**

Enfants	Billes
?	24
1	4

L'opération à faire est une division quotition pour chercher le nombre de parts.

$$4 \times \dots = 24 \text{ ou } 24 : 4 = 6 \times \dots$$